

Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников
по математике
в 2025 – 2026 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В таблице критериев по каждой задаче баллы не суммируются, то есть при применении критерия на большее количество баллов критерии на меньшее число баллов не дают вклада в результат.

4) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

5) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставяемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а жюри выставяет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено. Финальная оценка является целым числом от 0 до 7.

6) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные опiski в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательно краткая запись условия геометрических задач.

7) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

8) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказа-

тельств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

9) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

10) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**).

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников по математике
в 2025 – 2026 учебном году
6 класс**

Время выполнения заданий — 3 часа 55 минут

6.1. Две команды проводили между собой конкурс, состоящий из 13 заданий. За победу в любом задании команда получала 3 очка, за ничью — 2 очка, за поражение — 1 очко. Одна из команд набрала 25 очков. Выиграла она в конкурсе или проиграла? Ответ обоснуйте.

Решение: За каждое задание две команды в сумме получают ровно 4 очка, поэтому за конкурс из 13 заданий они в сумме набрали $13 \cdot 4 = 52$ очка. Тогда вторая команда набрала $52 - 25 = 27$ очков, поэтому она выиграла со счётом $27 : 25$.

Ответ: команда проиграла.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Приведён верный пример, показывающий, что команда могла проиграть	3 балла
Верный ответ без обоснования	0 баллов

6.2. От шоссе к четырём поселкам A , B , C , D последовательно отходят четыре дороги. Известно, что путь по дороге–шоссе–дороге от A до B равен 9 км, от A до C — 13 км, от B до C — 8 км, от B до D — 14 км. Найдите длину такого пути от A до D . Ответ обоснуйте.

Решение: Длина маршрута от A до C через посёлок B равна $AB + BC = 17$ км, что на 4 км больше, чем напрямую от A до C . Разность длин — это удвоенное расстояние от B до шоссе. Значит, B отстоит от шоссе на расстояние 2 км. Длина маршрута от A до D через посёлок B равна $AB + BD = 23$ км, из которых 4 приходится на дорогу от шоссе до пункта B и обратно. Значит, путь напрямую от A до D составляет $23 - 4 = 19$ км.

Ответ: 19 км.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения есть арифметические ошибки возможно, приведшие к неверному ответу	6 баллов
Условие задачи верно записано с помощью системы уравнений; эта система не решена или решена алгебраически неверно	3 балла
Имеется верная схема дорог (с указанием данных расстояний)	1 балл
Верный ответ без обоснования	0 баллов

6.3. *В помещении банка находятся 12 закрытых сейфов, стоящих в ряд. Известно, что ближайшей ночью сотрудники банка откроют три соседних сейфа, и в средний открытый сейф положат слиток золота. Затем сейфы снова закроют. У имеющего доступ к сейфам начальника охраны имеется 6 одинаковых детекторов, каждый из которых, будучи помещенный на сейф, может определить, открывался этот сейф или нет. Может ли начальник охраны сегодня вечером разместить детекторы на сейфах так, чтобы на завтрашнее утро он по их показаниям определил, где лежит слиток золота? Ответ обоснуйте.*

Решение: Покажем, что начальник охраны сможет определить положение слитка золота, если разместит детекторы на сейфах через один (например, на всех нечётных сейфах, считая слева). Действительно, теперь из любых трёх последовательно стоящих сейфов детекторами снабжены либо один, либо два; соответственно, наутро один или два детектора покажут, что их сейфы открывались, а остальные этого не покажут. Если детекторы показали, что открывались два сейфа, то открывался и сейф между ними, и именно в нём находится слиток. Если же только один детектор показал, что его сейф открывался, то открывались и два его соседа, а, значит, слиток лежит в том сейфе, на котором установлен сработавший детектор.

Другой алгоритм решения задачи таков: начальник охраны не ставит детекторы на два сейфа с каждого из краёв и на два средних, то есть сейфы с детекторами стоят двумя группами по три и с расстоянием в два сейфа между группами. Легко видеть, что при любом вскрытии трёх последовательных сейфов сработают детекторы в какой-то из групп. Если сработают все три — золото в среднем из них, если два — то оно в крайнем, на котором сработал детектор. Если один — оно в сейфе без детектора, стоящем рядом с тем, который открывали.

Можно доказать, что остальные размещения детекторов не гарантируют однозначного определения местоположения слитка.

Ответ: может.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Приведёна верная схема установка детекторов и показано, как наутро определить местоположение слитка	7 баллов
Приведёна верная схема установка детекторов, но не обосновано, что местоположение слитка можно определить во всех случаях	4 балла
Верный ответ без обоснования	0 баллов

6.4. *Можно ли прямоугольник размером $15\text{ см} \times 43\text{ см}$ разрезать без остатка на прямоугольники (не обязательно одинаковые) с целыми сторонами, у каждого из которых одна сторона больше другой ровно на 7 см ? Ответ обоснуйте.*

Решение: Предположим, что нам удалось осуществить требуемое разрезание. Тогда у каждого из полученных прямоугольников длины сторон выражаются целым числом сантиметров, причём одна — чётным числом, другая — нечётным. Значит, площадь каждого из прямоугольников, выраженная в квадратных сантиметрах, равна чётному целому числу. Тогда целому чётному числу равна и сумма этих площадей, равная площади исходного прямоугольника. Но эта площадь равна $15 \cdot 43\text{ см}^2$ — число нечётное. Противоречие.

Ответ: нельзя.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном решении не доказано (хотя используется) чётность площади отрезаемых прямоугольников	5 баллов
Имеется идея сравнить площади исходного прямоугольника и полученных при разрезании	2 балла
Верный ответ без обоснования, а также его иллюстрация неполным перебором случаев	0 баллов

6.5. *По кругу стоят 20 натуральных чисел (не обязательно различных). В каждой четверке подряд идущих чисел есть число, большее суммы трёх оставшихся. Какое наименьшее значение может принимать сумма этих 20 чисел? Ответ обоснуйте.*

Решение: Сумма любых трёх натуральных чисел не меньше трёх, поэтому в каждой четвёрке подряд идущих чисел есть число, большее или равное 4. Остальные три числа не меньше 1 каждое, поэтому сумма любых четырёх последовательных

чисел не меньше, чем $4 + 3 \cdot 1 = 7$. Так как все числа можно разбить на пять непесекающихся последовательных четвёрок, общая сумма не меньше, чем $5 \cdot 7 = 35$.

Пример, когда сумма равна 35, строго единственный. 15 единиц стоят группами по три единицы, а группы разделены одной четвёркой.

Ответ: 35.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Обосновано, что сумма всегда не меньше 35, а примера, подтверждающего эту оценку, нет	5 баллов
Верный пример без доказательства оптимальности	3 балла
Замечено, что среди любых четырёх последовательных чисел есть не меньше 4	2 балла
Верный ответ без обоснования	1 балл
Примеры, когда сумма чисел больше 35	0 баллов

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников по математике
в 2025 – 2026 учебном году
7 класс**

Время выполнения заданий — 3 часа 55 минут

7.1. Математик Иванов на 6 лет старше своей жены программиста Ивановой. Однажды Иванов обнаружил, что ровно половину своей жизни он провел в браке с Ивановой. Ровно через 14 лет после этого Иванова обнаружила, что она провела в браке с Ивановым ровно две третьих своей жизни. Сколько лет будет математику Иванову и программисту Ивановой, когда он и она отпразднуют золотую свадьбу — пятидесятилетие своей супружеской жизни? Ответ обоснуйте.

Решение: Пусть на момент времени, когда Иванов провёл в браке с Ивановой половину своей жизни, Иванову было $2x$ лет. Тогда свадьба состоялась, когда ему было x лет, а Ивановой $x - 6$. Следовательно, на момент времени, когда Иванова пробыла замужем две трети своей жизни, ей было $3(x - 6)$ лет, Иванову было $3(x - 6) + 6 = 3x - 12$, и, по условию задачи, $3x - 12 = 2x + 14$, откуда $x = 26$. Золотая свадьба будет отпразднована, когда Иванову будет $x + 50 = 76$ лет, а Ивановой на 6 лет меньше, то есть 70.

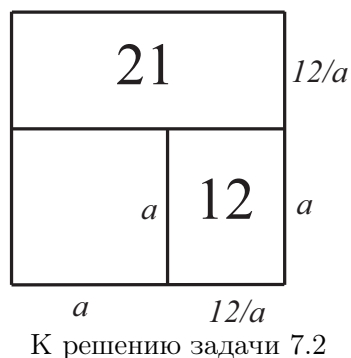
Ответ: 76 лет Иванову и 70 — Ивановой.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Ход решения верен, но есть арифметические ошибки, возможно, приведшие к неверному ответу	6 баллов
Условие задачи верно записано с помощью уравнения (или системы уравнений), которое решено неверно (или не решено)	3 балла
Верный ответ с проверкой, что такая ситуация возможна (нет обоснования, что он единственный)	1 балл
Верный ответ без обоснования	0 баллов

7.2. От бумажного квадрата отрезали прямоугольник площади 21, а затем от оставшейся части квадрата еще отрезали прямоугольник площади 12. В результате появился маленький квадрат. Какова его площадь? Ответ обоснуйте.

Решение: Пусть длина стороны маленького квадрата a . Тогда вторым отрезанием был отрезан прямоугольник, одна из сторон которого a (см. рисунок). Его



площадь равна 12, поэтому вторая сторона равна $\frac{12}{a}$, а сторона исходного квадрата равна $a + \frac{12}{a}$. Значит, площадь отрезанного первый раз прямоугольника равна

$$\left(a + \frac{12}{a}\right)\left(a + \frac{12}{a} - a\right) = 21.$$

Отсюда $a = 4$, и площадь оставшегося квадрата равна 16.

Ответ: 16.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Условие задачи верно записано с помощью уравнения (или системы уравнений), которое решено неверно (или не решено)	3 балла
Верный ответ и верный пример квадрата с указанием разрезов	1 балл
Верный ответ без обоснования	0 баллов

7.3. В кружке конструкторов занимаются 40 школьников. У каждого из них есть болтики, винтики и гвоздики. Известно, что кружковцев, у которых количество гвоздиков не равно количеству болтиков, ровно 15 человек. Школьников, у которых количество винтиков равно количеству гвоздиков, ровно 10. Докажите, что есть не менее 15 школьников, у которых количество винтиков не равно количеству болтиков. Ответ обоснуйте.

Решение: Из 40 школьников кружка ровно у 15 количество гвоздиков не равно количеству болтиков. Рассмотрим остальных 25 кружковцев. У каждого из них гвоздиков и болтиков поровну. Если у кого-то из этих 25 винтиков и болтиков одинаковое количество, то у него поровну винтиков и гвоздиков. По условию таких школьников не может быть больше 10. Исключим их из рассмотрения. Остаётся по крайней мере 15 человек, у которых число винтиков не равно числу болтиков. Утверждение доказано.

Рекомендации по проверке:

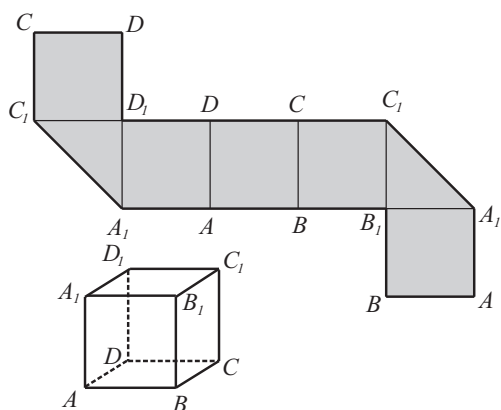
Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Доказано, что минимум у 25 школьников поровну гвоздиков и болтиков	3 балла
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи	0 баллов



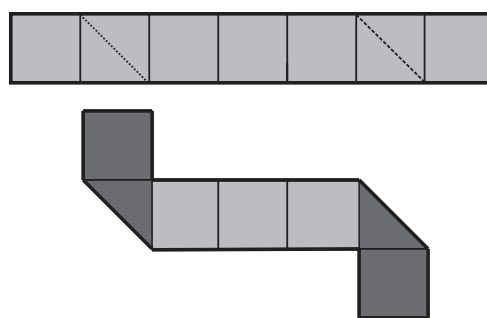
К условию задачи 7.4

7.4. Имеется полоска двустороннего скотча размером $7 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рисунок). Её можно как угодно перегибать, но нельзя рвать. Как полностью обклеить ею поверхность деревянного кубика с ребром 1 см ? Укажите все места перегибов и развёртку полоски после них.

Решение: Одной из возможных развёрток куба является следующая (см. рисунок слева, сгибы идут по границам квадратов). Такую развёртку легко свернуть из полосы 1 на 7, перегибая второй и шестой квадрат по диагонали. (см. рисунок справа, для наглядности противоположные стороны полоски покрашены разными цветами).



К решению задачи 7.4, вид развёртки



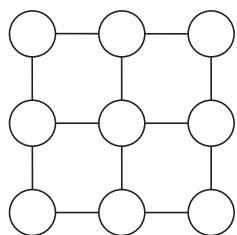
К решению задачи 7.4, места перегибов

Рекомендации по проверке:

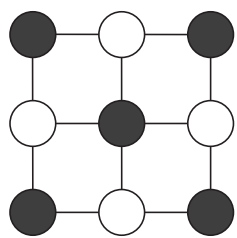
Есть в работе	Баллы
Приведена развёртка и показаны места перегибов ИЛИ есть верное объяснение, как обклеить кубик	7 баллов
Примеры неверного обклеивания кубика	0 баллов

7.5. Девять ячеек соединены отрезками так, как показано на рисунке. В этих ячейках записаны все натуральные числа от 1 до 9 (по одному числу в ячейке), но неизвестно, в какой ячейке какое число стоит. За один ход разрешается

выбрать две ячейки, соединённых отрезком, и добавить к записанным в них числам по 1. Может ли случиться, что после нескольких операций все девять чисел, стоящих в ячейках, будут нацело делиться на 2025? Ответ обоснуйте.



К условию
задачи 7.5



К решению
задачи 7.5

Решение: Раскрасим ячейки в «шахматном» порядке (см. рисунок) и заметим, что на каждом ходе сумма чисел, стоящих в чёрных ячейках увеличивается на ту же величину, что и сумма чисел в белых ячейках. Таким образом, разность этих сумм всё время остаётся неизменной (это инвариант задачи).

Если в какой-то момент времени все 9 чисел будут кратны числу 2025, то и упомянутая разность будет делиться на 2025 нацело. Но эта разность по модулю не превосходит числа

$$(9 + 8 + 7 + 6 + 5) - (1 + 2 + 3 + 4) = 25.$$

Значит, она обязана равняться нулю, то есть сумма чисел в белых ячейках должна быть равна сумме цифр в чёрных, что верно и для начальной позиции. Но тогда сумма чисел во всех ячейках должна быть чётна, в то время как на самом деле она равна 45.

Предположение, что числа во всех ячейках кратны 2025, привело к противоречию. Значит, этого не может быть.

Ответ: не может.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Обнаружен инвариант — разность сумм в чёрных и белых ячейках	3 балла
Приведено решение для нескольких конкретных расстановок чисел	2 балла
Верный ответ без обоснования	0 баллов

7.6. Червяк считается взрослым, если его длина 1 метр. Взрослого червяка можно разрезать на две части в любом отношении длин. При этом получаются два новых червяка, которые сразу начинают расти со скоростью 1 метр в час каждый. Когда длина червяка достигает 1 метра, он прекращает расти. Можно ли из одного взрослого червяка получить десять взрослых червяков быстрее, чем за 1 час? Ответ обоснуйте. Не взрослых червей резать нельзя: обе части погибнут.

Решение:

Способ 1. Для удобства считаем, что резать начинаем в полночь, в 00 часов 00 минут. Отрежем от червяка $\frac{1}{512}$, и назовём большую часть базовой. Далее действуем

так: на отрезанную малую часть, равно как и все части, которые в дальнейшем будем отрезать от базовой, внимания не обращаем, дожидаясь пока базовая часть не станет взрослым червём и отрезаем от неё очередной кусок. Величины отрезаемых кусков каждый раз удваиваем. Так как скорость роста у всех кусков одна и та же, то время между последовательными отрезаниями тоже будет каждый раз увеличиваться вдвое. Первый раз базовой части надо нарастить $\frac{1}{512}$ м, и на это уйдёт $\frac{1}{512}$ часа. Во второй раз базовой части надо будет наращивать уже $\frac{1}{256}$ м, и на это уйдёт $\frac{1}{256}$ часа. Дальнейшие промежутки (в часах) $\frac{1}{128}, \frac{1}{64}, \dots, \frac{1}{4}$. В этот момент делаем последний разрез, деля базовую часть пополам (при этом базовая часть дальше будет вести себя как последний отрезанный кусок). Всего сделано 9 разрезов, значит, получилось 10 кусков. n -ый по счёту отрезанный кусок ($1 \leq n \leq 9$) был отрезан в

$$\underbrace{\frac{1}{512} + \frac{1}{256} + \dots}_{n-1 \text{ слагаемое}} = \frac{1}{512}(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-2}) =$$

$$= \frac{1}{512}(2^{n-1} - 1) = -2^{-9} + 2^{n-10}$$

часов и имел на тот момент длину $\frac{1}{2^{10-n}}$. Для достижения взрослости ему требуется отрастить $1 - \frac{1}{2^{10-n}}$ метров длины, и на это уйдёт $1 - \frac{1}{2^{10-n}} = 1 - 2^{n-10}$ часа, следовательно, состояния взрослости он достигнет в момент времени (в часах)

$$1 - 2^{-9} + 2^{n-10} + 1 - 2^{n-10} = 1 - \frac{1}{512},$$

то есть все куски (включая базовый) достигнут взрослости в одно и то же время, чуть меньшее часа ночи.

Примечание: как ясно из решения, за 1 час можно вырастить любое наперёд заданное количество червей.

Способ 2. Покажем, как за час вырастить **любое** наперёд заданное количество червяков. Так как скорость роста любой отрезанной части одинакова, эта часть за t часов вырастает на t метров ($0 \leq t \leq 1$) независимо от своей длины (или стабилизируется на длине 1 м, если достигнет за время t взрослого состояния). Пусть мы хотим вырастить за час n червей. Тогда пропускаем $\frac{1}{2^n}$ часа и отрезаем от взрослого червяка $\frac{1}{2^n}$ метра. Отрезанный кусок за оставшиеся $1 - \frac{1}{2^n}$ часа увеличится на $1 - \frac{1}{2^n}$ и достигнет длины ровно 1 м. Большой кусок станет взрослым червем через $\frac{1}{2^n}$ часа после отрезания, что составляет $\frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$ часа с момента

отсчёта времени. Отрежем от него $\frac{1}{2^{n-1}}$ метра. Опять меньшая часть достигнет метровой длины ровно через 1 час с начала отсчёта времени, а большая через $\frac{1}{2^{n-2}}$ часа станет взрослым червём. Отрежем от неё $\frac{1}{2^{n-1}}$ метра и т. д. Последний разрез делаем спустя полчаса, разрезая взрослого червя пополам. В итоге через час после начала каждая отрезаемая часть превратится во взрослого червя.

Способ 3. Пустим время вспять, то есть пусть, начиная, например, с часу дня, 10 червяков уменьшают свою длину с постоянной скоростью 1 метр в час каждый, а мы можем «склеивать» двух червяков в тот момент когда их суммарная длина станет равна 1 м. Наша цель — получить не позже, чем к полудню одного взрослого червяка. Тогда в 12-30 у нас останется 10 червяков длиной $1/2$ м. Склеим двух из них — получим одного метрового червяка и 8 полуметровых. В 12-15 метровый червяк уменьшится до 75 см, а длины всех остальных станут равными 25 см. После склейки останутся один метровый червяк и семь 25-сантиметровых. Следующую склейку проведём в 12 часов 7 минут 30 секунд и т. д. Когда до 12-00 останется $\frac{1}{512}$ часа, у нас и останется только один однометровый червяк.

Ответ: можно.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Приведён верный алгоритм получения 10 червей и объяснено, почему черви станут взрослыми через час	7 баллов
Приведён верный алгоритм получения 10 червей, но объяснение, почему он удовлетворяет условию, неверно или отсутствует	5 баллов
Верный ответ без обоснования, а также любые утверждения, не ведущие к решению	0 баллов

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников по математике
в 2025 – 2026 учебном году
8 класс**

Время выполнения заданий — 3 часа 55 минут

8.1. В школе количество мальчиков составляет 40% (соответственно, девочки составляют 60%). Когда заболели 30% всех её учеников, школу закрыли на карантин. Известно, что 40% заболевших — это девочки. Кого в школе на момент введения карантина было больше: здоровых мальчиков или заболевших девочек? Ответ обоснуйте.

Решение:

Способ 1. Без ограничения общности можно считать, что в школе учатся 100 человек. Тогда мальчиков в школе 40 человек, а девочек 60. Заболело 30 человек, из которых ровно 12 девочек. Значит, заболело 18 мальчиков, здоровых мальчиков тогда осталось 22, что на 10 больше, чем заболевших девочек. Здоровых мальчиков больше.

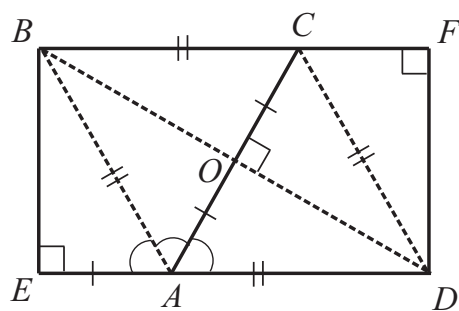
Способ 2. Пусть в школе n учеников, из которых на начало карантина m заболевших. Тогда всего в школе учатся $0,4n$ мальчиков и $0,6n$ девочек. Заболели же $0,6m$ мальчиков и $0,4m$ девочек. Нам надо сравнить числа $0,4n - 0,6m$ и $0,4m$. По условию $\frac{m}{n} = 0,3$, то есть $m = 0,3n$. Значит, $0,4n - 0,6m = 0,22n$, $0,4m = 0,12n$. Первое число больше, значит, и здоровых мальчиков больше.

Ответ: здоровых мальчиков больше.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ (достаточно правильного примера)	7 баллов
При верном решении имеются арифметические ошибки, возможно, приведшие к неверному ответу	6 баллов
Задача верно сведена к решению уравнения в целых числах	3 балла
Верный ответ без обоснования	0 баллов

8.2. Равнобедренный треугольник с углом в 120° сложен ровно из трёх слоев бумаги. Треугольник развернули — и получился прямоугольник. Нарисуйте такой прямоугольник и покажите пунктиром линия сгиба.



К решению задачи 8.2

Решение: Рассмотрим ромб $ABCD$ с тупым углом $\angle A = 120^\circ$. Из вершин B и D опустим перпендикуляры BE и DF на прямые AD и BC соответственно (см. рисунок). Получившийся прямоугольник $BEDF$ — искомый, а линии сгиба — суть отрезки BA , CD и BD (пунктирные линии на рисунке). Действительно, по свойствам диагоналей ромба имеем, что отрезки AC и BD перпендикулярны, а $\angle BAC = \angle CAD = 60^\circ$. Тогда $\angle BAE = 180^\circ - \angle BAD = 60^\circ = \angle BAC$, и треугольники BEA и BOA равны по гипотенузе и острому углу (O — точка пересечения диагоналей ромба). Значит, при сгибании вдоль прямой BA треугольник BAE совместится с треугольником ABO . Аналогично, при сгибании вдоль прямой CD треугольник DCF совместится с треугольником DCO . Теперь в ромбе $ABCD$ треугольники ABO и CDO покрыты в два слоя бумаги, а треугольники ADO и BCO — в один. При третьем сгибании вдоль прямой BD совместятся треугольники COD и DOA , а также треугольники BOC и BOA . В итоге все точки треугольника BAD будут покрыты трижды. Очевидно, что треугольник ABD равнобедренный с углом 120° , то есть именно тот, который нам и нужен.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Приведён верный рисунок, из которого видны отношения, в которых линии перегиба делят стороны, и углы их наклона	7 баллов
Приведён примерный рисунок (без указаний пропорций отрезков или углов) и не объяснено, почему он соответствует условию задачи	3 балла
Неверные конструкции (в любом количестве)	0 баллов

8.3. Действительные числа a и b таковы, что

$$a^2 - b^2 = a^3 + b^3 \quad \text{и} \quad a^3 - b^3 = a^4 + b^4.$$

Чему может равняться произведение ab ? (Найдите все возможные значения и докажете, что других нет.)

Решение:

Способ 1. Перемножим левые и правые части равенств

$$a^3 + b^3 = a^2 - b^2 \quad \text{и} \quad a^3 - b^3 = a^4 + b^4.$$

Получим уравнение-следствие

$$a^6 - b^6 = a^6 + a^2b^4 - b^2a^4 - b^6 \Leftrightarrow a^2b^2(b^2 - a^2) = 0.$$

Отсюда либо одна из переменных равна 0 (что возможно, например, $a = b = 0$ — очевидное решение системы), и тогда $ab = 0$, либо $b = \pm a \neq 0$. В последнем случае подставив значение b во второе уравнение, получим пару $a = 1, b = -1$, которая также является одним из решений системы. Значит, в этом случае $ab = -1$.

Способ 2. Преобразуем первое уравнение равносильным образом:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 = a^3 + b^3 &\Leftrightarrow (a - b)(a + b) = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a = -b \text{ или } a - b = a^2 - ab + b^2. \end{aligned}$$

Теперь обратимся к второму уравнению. В первом случае ($a = -b$) оно превращается в уравнение $2a^3 = 2a^4$, откуда или $a = 0$, или $a = 1$. Получаем два решения: $a = b = 0$ или $a = 1, b = -1$. Во втором случае ($a - b = a^2 - ab + b^2$) левая часть второго уравнения равна

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2) = \\ &= (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 = a^4 + b^4 + a^2b^2, \end{aligned}$$

поэтому уравнение примет вид $a^2b^2 = 0$. В этом случае одна из переменных равна 0, и с учётом равенства $a - b = a^2 - ab + b^2$ получаем пары $a = b = 0, a = 0, b = -1$, и $a = 1, b = 0$. Значит, ab может принимать только два значения: 0 или -1 .

Ответ: 0 или -1 .

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Получены линейные или квадратные (относительно переменных a и b) уравнения-следствия	4 балла
Приведены удовлетворяющие условию пары (a, b) , при которых получаются оба ответа: 0 и -1	2 балла
Приведена удовлетворяющая условию пара (a, b) и найден один из ответов 0 или -1	1 балл
Верный ответ без обоснования	0 баллов

8.4. На круговой дорожке стадиона тренируются Валера на самокате и Серёжа на велосипеде. Скорость Серёжи в 1,65 раза больше скорости Валеры. Они стартовали из одной точки стадиона в одном и том же направлении и движутся с постоянными скоростями. В скольких разных точках дорожки происходят их встречи, если тренировка продолжается достаточно долго? Ответ обоснуйте.

Решение:

Способ 1. Пусть длина всей дорожки равна 1. Найдём на каких расстояниях от точки старта будут происходить встречи Валеры и Серёжи. Их n -ая ($n \in \mathbb{N}$) по счёту встреча означает, что Серёжа проехал больше, чем Валера ровно на n кругов, то есть проехал расстояние на n больше, чем Валера. Пусть до n -ой встречи Валера проехал расстояние a . Так как скорость Серёжи больше скорости Валеры в 1,65 раза, то до встречи Серёжа проехал расстояние $1,65a$, что на величину $1,65a - a = 0,65a = \frac{13}{20}a$ больше, чем Валера. Таким образом, условие, что спортсмены встретились, записывается уравнением $\frac{13}{20}a = n$, откуда $a = \frac{20n}{13}$. От точки старта точка n -ой встречи отстоит на величину $\{a\}$ — дробную часть a . Дробная часть чисел вида $a = \frac{20n}{13}$ — это или 0, или правильная дробь со знаменателем 13. Все такие дроби можно получить, подбирая подходящие n . Поэтому всего точек встреч 13.

Способ 2. Пусть Серёжа проезжает дорожку за 100 единиц времени. Тогда по условию Валера проезжает её за 165 таких единиц. Найдём через сколько единиц времени Серёжа и Валера впервые одновременно окажутся в точке старта. Это — наименьшее натуральное число, которое нацело делится и на 100, и на 165, то есть наименьшее общее кратное этих чисел. Оно равно 3300. За это время Серёжа проедет $3300 : 100 = 33$ круга, Валера $3300 : 165 = 20$ кругов, то есть Серёжа обгонит Валеру ровно $33 - 20 = 13$ раз. Покажем, что все точки обгона будут различны. От противного, пусть некоторая точка обгона встретилась дважды. Тогда мы можем считать эту точку точкой старта, и, повторив предыдущее рассуждение, получим, что следующее её одновременное посещение гонщиками наступит через 3300 единиц времени, что неверно. Итак, за первые 3300 единиц времени на дорожке будет ровно 13 точек встречи. Дальнейшее движение новых точек не добавит, так как 14-я встреча произойдёт на месте первой, 15-ая на месте второй и т. д.

Способ 3. Пусть длина дорожки равна l метров, скорости Валеры и Серёжи равны соответственно x и $1,65x$ метров в секунду, а первая встреча состоялась спустя t секунд после старта. До первой встречи Серёжа проехал ровно на l метров, чем Валера. Уравнением это записывается так: $1,65xt - xt = l$, откуда $t = \frac{20l}{13x}$. Значит, до встречи Валера проехал ровно $\frac{20}{13}$ всей дорожки. Так как скорости спортсменов постоянны, до следующей встречи Валера проедет такое же расстояние, до третьей — ещё раз такое же и т. д. Теперь установим на дорожке 13 столбов на равном расстоянии друг от друга (один в точке старта). Встречи будут происходить как раз у этих столбов, причём каждый раз Валера будет проезжать 20 из них (это полный круг и ещё 7 столбов). Значит, если занумеровать столбы числами от 0 до 12 в направлении движения гонщиков, то встречи будут происходить

последовательно у столбов с номерами 7, 14 (он же 1), 8, 15 (он же 2), 9, 16 (он же 3), 10, 17 (он же 4), 11, 18 (он же 5), 12, 19 (он же 6), 13 (он же 0), то есть у каждого столба какая-то встреча состоится.

Ответ: в 13 точках.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном решении имеются арифметические ошибки, возможно, приведшие к неверному ответу	6 баллов
Задача сведена к решению уравнения с целой (или с дробной) частью числа	3 балла
Верно найдены некоторые (не все) точки встреч спортсменов	1 балл
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи, а также ответ без обоснования	0 баллов

8.5. На огромном экране компьютера выписаны всевозможные последовательности из восьми цифр от 00 000 000 до 99 999 999 (каждая последовательность выписана один раз). Красным шрифтом записаны те последовательности, у которых сумма всех цифр, стоящих на чётных местах, равняется сумме всех цифр, стоящих на нечётных местах. Курсивом записаны те последовательности, сумма всех цифр в которых в точности равна 36. Докажите, что последовательностей, записанных красным шрифтом, столько же, сколько записанных курсивом.

Решение: Каждой выписанной последовательности $AB CDE FGH$ (A, B, C, D, E, F, G, H — цифры, не обязательно различные) поставим в соответствие последовательность $A(9 - B) C(9 - D)E (9 - F)G(9 - H)$. Это соответствие будет взаимно-однозначным, то есть разным исходным последовательностям будут соответствовать разные. Выясняется, что если последовательность $AB CDE FGH$ записана красным шрифтом, то $A + C + E + G = B + D + F + H$, что выполнено тогда и только тогда, когда сумма цифр последовательности, поставленной ей в соответствие, равна $A + 9 - B + C + 9 - D + E + 9 - F + G + 9 - H = 36$. То есть каждой последовательности, записанной красным цветом, поставлена в соответствие своя последовательность, записанная курсивом, и наоборот. Значит, тех и других последовательностей поровну.

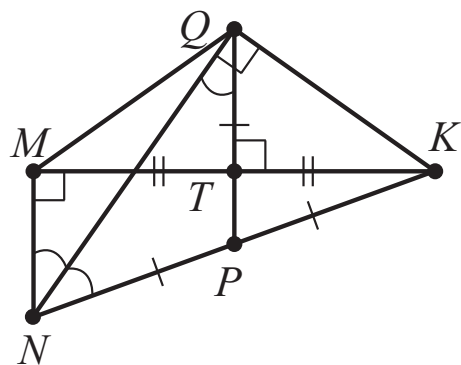
Примечание: Некоторые последовательности (например, 33 445 566) будут выписаны красным курсивом. На рассуждение, приведённое в решении выше, это не влияет. Заметим ещё, что при указанной в решении операции последовательности, которая выписана красным курсивом, соответствует другая такая же по-

следовательность. Поэтому можно изначально все такие последовательности из рассмотрения исключить, и доказательство также останется корректным.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Имеется идея взаимно-однозначного соответствия последовательностей последовательностей обоих видов	3 балла
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи	0 баллов

8.6. В прямоугольном треугольнике MNK точки P и T — середины гипотенузы NK и катета MK соответственно. Биссектриса угла MNK пересекает прямую PT в точке Q . Докажите, что треугольники KQM и NPQ подобны.



К решению задачи 8.6

Решение: Прямая PQ является серединным перпендикуляром к отрезку MK (см. рисунок), поэтому треугольник KQM равнобедренный. $PQ \parallel MN$, поэтому $\angle NQP = \angle MNQ = \angle QNP$, то есть треугольник NPQ также равнобедренный. Для доказательства подобия, следовательно, достаточно установить равенство углов MKQ и QNP . Из равнобедренности треугольника NPQ и того факта, что P — середина NK следует, что треугольник PKQ тоже равнобедренный (а треугольник NQK прямоуголь-

ный). Подсчёт углов:

$$\begin{aligned}\angle MKQ &= \angle PKQ - \angle PKM = 90^\circ - \angle KNQ - (90^\circ - \angle MNK) = \\ &= \angle MNK - \angle KNQ = \angle MNQ = \angle KNQ\end{aligned}$$

завершает доказательство.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Доказана равнобедренность треугольника PKQ (или доказано, что $\angle NQK = 90^\circ$)	3 балла
Доказана равнобедренность треугольника NQP	2 балла
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи	0 баллов

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников по математике
в 2025 – 2026 учебном году
9 класс

Время выполнения заданий — 3 часа 55 минут

9.1. На доске записано число 20. Каждую минуту с числом, записанным на доске, проделывают одну из четырёх операций: число либо умножают на 2, либо делят на 2, либо умножают на 5, либо делят на 5. Результат операции выписывают на доску, а предыдущее число стирают. Докажите, что число, которое будет написано на доске ровно через час, не будет равно 250.

Решение:

Способ 1. $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$. Каждую минуту в это выражение либо добавляется один из множителей 2 или 5, либо из него убирается один такой множитель (если в какой-то момент возникает дробное число, считаем, что множители, стоящие в знаменателе, находятся в отрицательном количестве, то есть, например, в числе $\frac{5}{4}$ один множитель 5 и минус два множителя 2). Значит, за чётное число минут чётность общего числа множителей не изменится, поэтому через 60 минут в числе будет по-прежнему нечётное количество простых множителей, в то время, как число $250 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ состоит из четырёх таких множителей.

Способ 2. Предположим противное, и пусть всего было x умножений на 2, y умножений на 5, z делений на 2 и t делений на 5. Всего было сделано 60 операций, а в итоге получилось число $20 \cdot \frac{2^x}{2^z} \cdot \frac{5^y}{5^t}$. Тогда имеем систему

$$\begin{cases} x + y + z + t = 60, \\ 20 \cdot \frac{2^x}{2^z} \cdot \frac{5^y}{5^t} = 250. \end{cases}$$

Второе уравнение системы приводится к виду $2^{x+1} \cdot 5^y = 2^z \cdot 5^{t+2}$. Отсюда (так как разложение любого числа на простые множители единственно) следует, что $x + 1 = z$, а $y = t + 2$. Подставив эти значения в первое уравнение системы, получим $2x + 2t + 3 = 60$, откуда $x + t = \frac{57}{2}$ — число не целое. Противоречие.

Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Условие задачи верно записано в виде уравнения (системы уравнений) в целых числах	3 балла
Замечено, что причина невозможности в чётности общего количества операций	2 балла
Доказываемое утверждение проиллюстрировано конкретными примерами	0 баллов

9.2. Для квадратного трёхчлена $p(x) = x^2 + ax + b$ с целыми коэффициентами a и b при любом действительном значении x выполнено неравенство $p(x) \geq -0,9$. Докажите, что при любом действительном значении x выполнено и более сильное неравенство $p(x) \geq -0,25$.

Решение:

Способ 1. Условие на квадратный трёхчлен означает, что дискриминант трёхчлена $p(x) = x^2 + ax + b + 0,9$, равный $a^2 - 4b - 3,6$, неположителен. А доказать требуется неположительность дискриминанта трёхчлена $p(x) = x^2 + ax + b + 0,25$, то есть неравенство $a^2 - 4b - 1 \leq 0$. Число $a^2 - 4b$ — целое, и при делении на 4 в остатке даёт либо 0, либо 1 (в зависимости от чётности числа a). Оно не больше 3,6, поэтому оно не больше 1, что и требовалось доказать.

Способ 2. Наименьшее значение квадратного трёхчлена с положительным старшим коэффициентом достигается в вершине параболы, то есть в точке с абсциссой $-\frac{a}{2}$. Возможны два случая.

1) Число a чётное. Тогда вершина параболы лежит в целочисленной точке, и значение трёхчлена в этой точке также является целым числом. Так как оно не меньше числа $-0,9$, то оно не меньше нуля. В этом случае весь трёхчлен лежит не ниже оси абсцисс, то есть значения во всех точках неотрицательны.

2) Число a нечётно. Тогда абсцисса вершины параболы — число полуцелое, и значение в этой вершине равно $-\frac{a^2}{4} + b = n - \frac{1}{4}$, где n — некоторое целое число. Так как это значение не меньше $-0,9$, число n не может быть отрицательным, поэтому значение квадратного трёхчлена в вершине (а тогда и во всех точках) не меньше $0 - \frac{1}{4} = -0,25$, что и требовалось доказать.

Примечание: Доказываемое неравенство не может быть усилено: для любого приведённого квадратного трёхчлена с дискриминантом, равным 1, (например, для $p(x) = x^2 + x$) его наименьшее значение будет в точности равным $-0,25$.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Верно рассмотрен только случай чётного числа a	3 балла
Объяснено, что достаточно рассматривать значение $p(x)$ только в точке $x_0 = -a/2$ ИЛИ условие верно сведено к анализу дискриминантов двух квадратных трёхчленов	2 балла
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи, а также иллюстрация условия конкретными примерами	0 баллов

9.3. Незнайка последовательно измерил расстояния от некоторой точки P внутри квадрата $ABCD$ до четырёх его вершин и получил числа 1 см, 4 см, 8 см, 7 см. Докажите, что Незнайка ошибся.

Решение: Без ограничения общности пусть ближайшая к точке вершина квадрата левая верхняя. Тогда самая далёкая от неё – правая нижняя. Также можно считать, что правая верхняя ближе левой нижней. Пусть расстояния от точки до левой, верхней, правой и нижней сторон квадрата равны a , b , c и d см. По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 64$, $a^2 + d^2 = 49$ и $b^2 + c^2 = 16$. Из четырёх уравнений одно является следствием трёх других, а из остальных получаем $b = \sqrt{1 - a^2}$, $d = \sqrt{49 - a^2}$, $c = \sqrt{15 + a^2}$. Так как $a + c = b + d$ (это длина стороны квадрата), отсюда имеем

$$a + \sqrt{15 + a^2} = \sqrt{1 - a^2} + \sqrt{49 - a^2}.$$

Число $a \leq 1$, так как расстояние от точки до стороны не больше, чем расстояние от неё до вершины, лежащей на этой стороне. Но тогда левая часть меньше $1 + \sqrt{16} = 5$, а правая часть больше $\sqrt{48}$, что больше 5. Равенство невозможно, значит, Незнайка ошибся.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Получено, но не решено уравнение от одной переменной, верно описывающее полученные Незнайкой результаты	4 балла
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи	0 баллов

9.4. В школе прошёл однокруговой шахматный турнир (каждый участник сыграл с каждым ровно один раз). В нём участвовали и мальчики, и девочки, причём девочек было в 3 раза больше. За выигрыш давалось одно очко, за ничью —

пол-очка, за поражение — 0 очков. После окончания соревнований оказалось, что девочки в сумме набрали на 20% очков больше, чем мальчики. Какое минимальное количество школьников могло участвовать в турнире?

Решение: Чтобы не возиться с дробями, будем считать, что за победу давалось два очка, а за ничью — одно. Условие задачи при этом не изменится.

Пусть мальчики в сумме набрали a очков, тогда девочки набрали $1,2a$ очков, а доля очков, набранных мальчиками, равна

$$\frac{a}{2,2a} = \frac{5}{11}.$$

Пусть, кроме того, в турнире было $3x$ девочек и x мальчиков. Тогда общее количество партий турнира (оно вдвое меньше общего количества набранных очков) равно

$$\frac{4x(4x - 1)}{2} = 2x(4x - 1).$$

Следовательно, мальчики набрали

$$\frac{5}{11} \cdot 2 \cdot 2x(4x - 1) = \frac{20x(4x - 1)}{11}$$

очков. Это число целое, поэтому число $x(4x - 1)$ обязано делиться на 11. Наименьшее натуральное x с таким свойством — число 3.

Приведём пример турнира при $x = 3$. Пусть в турнире было 3 мальчика и 9 девочек. Мальчики выиграли все партии у девочек (27 партий) и набрали в партиях с девочками 54 очка. Ещё 6 очков они набрали в поединках между собой. В сумме мальчиками набрано 60 очков. Девочки набирали очки только в партиях между собой ($(9 \cdot 8)/2 = 36$ партий) и набрали 72 очка, что на 12 очков (или на 20%) больше, чем мальчики.

Примечание: Не очень сложно доказывается, что пример турнира, удовлетворяющего условию задачи, единственен: при $x > 3$ количество очков, набранных девочками в партиях между собой, превышает $6/11$ от общего количества разыгрываемых очков.

Ответ: 12 школьников.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Приведён пример турнира, удовлетворяющего условию	4 балла
Доказано, что ситуация невозможна, если число мальчиков меньше трёх И/ИЛИ установлено какое-либо ограничение сверху на количество участников турнира (достаточно только мальчиков)	2 балла
Верный ответ без обоснования ИЛИ доказательство невозможности ситуации, когда мальчик один	1 балл
Замечание, что количество участников турнира кратно 4, а также любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи	0 баллов

9.5. Для какого наибольшего натурального числа n существует единственное натуральное число k , удовлетворяющее неравенству

$$\frac{5}{6} < \frac{k}{n} < \frac{6}{7} ?$$

Ответ обоснуйте.

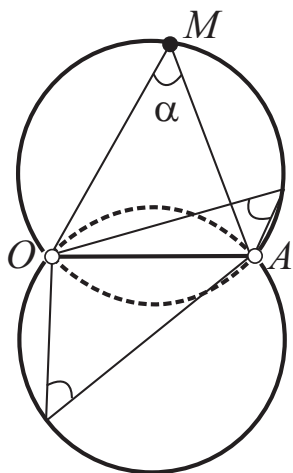
Решение: Так как $\frac{5}{6} = \frac{70}{84}$, $\frac{6}{7} = \frac{72}{84}$, то при $n = 84$ единственное число k , удовлетворяющее неравенству, это $k = 71$. При $n > 84$ на интервал $\left(\frac{5}{6}; \frac{6}{7}\right)$ длины $\frac{1}{42}$ целиком помещаются два отрезка длины $\frac{1}{n}$, поэтому если число $\frac{k-1}{n}$ — наибольшее число указанного вида, которое не больше $\frac{5}{6}$, то и число $\frac{k}{n}$, и число $\frac{k+1}{n}$ лежат в указанном интервале, значит, есть не менее двух чисел k удовлетворяющих неравенству из условия.

Ответ: 84.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Доказано что при $n > 84$ существует более одного k , удовлетворяющих неравенству из условия	4 балла
Доказано, что $n = 84$ удовлетворяет условию задачи	3 балла
Верный ответ без обоснования	1 балл
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению	0 баллов

9.6. На разных сторонах прямого угла с вершиной O отметили точки A и B так, что $AO = OB$. Найдите геометрическое место точек, лежащих внутри угла AOB и таких, из которых отрезки OA и OB видны под одинаковыми углами.



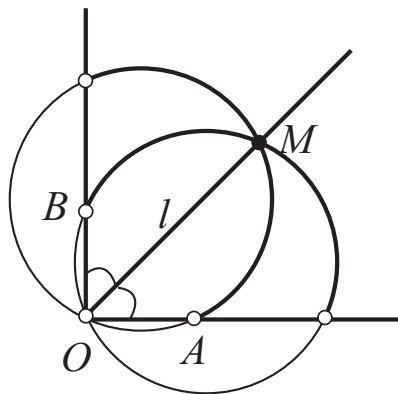
К решению задачи 9.6, ГМТ, откуда отрезок виден под заданным углом

Решение: Пусть точка M принадлежит требуемому ГМТ. Тогда $\angle AMO = \angle BMO = \alpha$. Рассмотрим четырёхугольник (возможно, невыпуклый) $AMBO$. Сумма его углов равна 360° , $\angle O = 90^\circ$, $\angle M = 2\alpha$. Отсюда $\alpha < 135^\circ$.

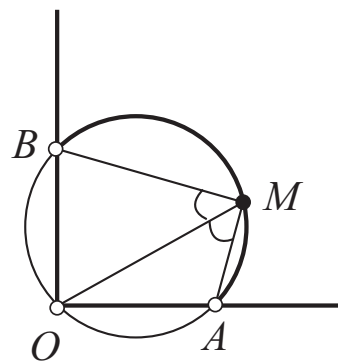
Геометрическим местом точек, из которых отрезок AO виден под углом α , является объединение двух равных дуг (без концов) окружностей — см. рисунок. Точка M находится на той дуге, которая лежит в полуплоскости с границей OA , содержащей точку B . Аналогично, точка M лежит на дуге окружности, из которой отрезок OB виден под тем же углом α и которая лежит в полуплоскости с границей OB , содержащей точку A .

Рассмотрим окружности, содержащие эти дуги. Возможно два случая.

1) Окружности различны. Тогда они симметричны относительно прямой l — биссектрисы угла AOB и имеют общую точку O . Вторая точка их пересечения также лежит на l . Следовательно, M лежит на биссектрисе угла AOB (см. рисунок слева). Отметим, что все точки биссектрисы входят в ГМТ: если $M \in l$, то треугольники MOA и MOB равны по двум сторонам и углу между ними.



К решению задачи 9.6, случай 1

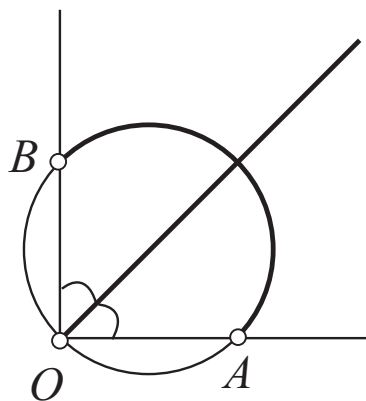


К решению задачи 9.6, случай 2

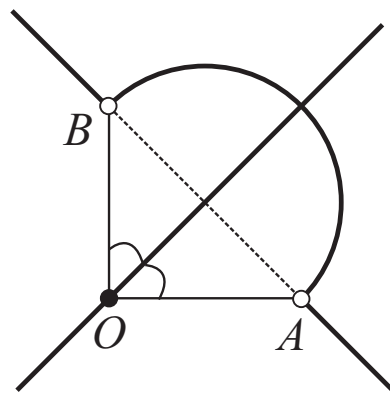
2) Окружности совпадают. Тогда эта общая окружность описана около треугольника AOB . Интересующие нас дуги имеют общую часть — дугу AB . Значит, точка M лежит на этой дуге. (см. рисунок справа). Все точки дуги (исключая их концы) входят в указанное множество: дуги OA и OB равны, так как стягиваются равными хордами, значит, для любой точки M дуги AB выполнено равенство $\angle AMO = \angle BMO$.

Мы доказали, что искомым геометрическим местом точек является объединение биссектрисы угла AOB и лежащей внутри угла дуги окружности, описанной около треугольника AOB — см. рисунок ниже слева. Это ответ.

Ответ:



Ответ к задаче 9.6



К примечанию к задаче 9.6

Примечание: Не очень сложно найти ГМТ всех точек плоскости, не обязательно лежащими внутри угла AOB , из которых отрезки AO и OB видны под равными углами. В этом случае множество будет иметь вид, изображённый на рисунке выше справа.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Верно найдено требуемое ГМТ всех точек плоскости (не только лежащих внутри угла AOB)	баллы не снижаются
Обосновано, что искомое ГМТ лежит в объединении биссектрисы угла AOB и окружности с диаметром AB и доказан хотя бы один из фактов а) или б) критерия на 4 балла	6 баллов
Обосновано, что искомое ГМТ лежит в объединении биссектрисы угла AOB и окружности с диаметром AB	5 баллов
Доказано два факта: а) точки биссектрисы угла входят в нужное ГМТ б) точки полуокружности с диаметром AB входят в нужное ГМТ	4 балла
Доказан факт б) из критерия на 4 балла	3 балла
Доказан факт а) из критерия на 4 балла	1 балл
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи	0 баллов

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников по математике
в 2025 – 2026 учебном году
10 класс**

Время выполнения заданий – 3 часа 55 минут

10.1. Решите систему уравнений относительно неизвестных x, y, z (a и b – параметры):

$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 2b^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3. \end{cases}$$

Решение: Из первого уравнения выражаем, например, z и подставляем в третье. После преобразований получим равносильное уравнение $(x + y)(a - x)(a - y) = 0$. Но из первого $x + y = a - z$, поэтому хотя бы одно из неизвестных равно a . Без ограничения общности $z = a$. Тогда $x + y = 0$ и из второго уравнения получаем, что $x^2 = b^2$. В итоге получаем решения $x = b, y = -b, z = a$ и ещё пять, получающихся из приведённого всевозможными перестановками x и y .

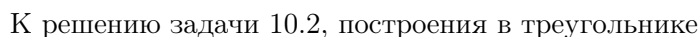
Ответ: $(b, -b, a), (b, a, -b), (-b, b, a), (-b, a, b), (a, b, -b), (a, -b, b)$.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения получены не все шесть троек ответа, а только некоторые из них, т. е. учтены не все перестановки чисел x, y и z	6 баллов
Получено уравнение-следствие вида $f(x, y, z) = 0$ и его левая часть разложена на множители	3 балла
Верный ответ без обоснования ИЛИ хотя бы одна из шести троек ответа с проверкой, что она удовлетворяет системе	1 балл
Любые выкладки, не ведущие к решению, а также решения при конкретных значениях a и b	0 баллов

10.2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BI и CJ внутренних углов B и C этого треугольника. Из произвольной точки M , лежащей на отрезке IJ , опущены перпендикуляры: MN на AB , MP на AC и MQ на BC . Докажите, что верно равенство $MN + MP = MQ$.

Решение: Опустим из точек I и J перпендикуляры: ID на AB , JE на AC , IG и JF на BC . По свойству биссектрисы $ID = IG = b$, $JF = JE = a$. Пусть, кроме того, $JM = p$, $MI = t$ (см. рисунок).


$$MP = \frac{at}{t+p}.$$
$$MN = \frac{bp}{t+p}.$$
[illegible]
$$MK = \frac{p(b-a)}{p+t}.$$
$$MQ = MK + KQ = \frac{p(b-a)}{p+t} + a =$$

$$= \frac{pb + at}{p + t} = MN + MP,$$

$$MN + NP = \frac{at}{p+t} + \frac{ap}{p+t} = a,$$

28

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи	0 баллов

10.3. Докажите, что для любых положительных чисел a, b и для любого значения $x \in [-1; 1]$ имеет место неравенство

$$\left| ax + \frac{b}{2}(1 - x^2) \right| \leq \max\{a, b\}.$$

Решение: В левой части стоит выражение вида $|f(x)|$, где $f(x)$ — квадратный трёхчлен. Посмотрим на него, как на функцию от x . Наибольшее значение этой функции на любом отрезке достигается или на концах отрезка, или в точке x_0 — вершине параболы — графика квадратного трёхчлена $f(x)$. Значения трёхчлена $f(x)$ на концах отрезка $[-1; 1]$ равны $f(-1) = a = f(1)$, что не больше a , и тем более не больше максимума из чисел a и b . Абсцисса вершины параболы равна $x_0 = \frac{a}{b}$. При $a > b$ она лежит вне отрезка $[-1; 1]$; в этом случае доказывать нечего. При $0 < a \leq b$ значение в вершине равно

$$\frac{a^2}{2b} + \frac{b}{2} \leq \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b,$$

то есть тоже не больше максимума из чисел a и b .

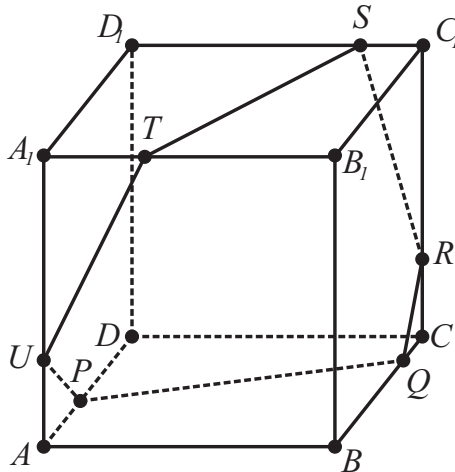
Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Неравенство верно доказано в случае $a \leq b$ ИЛИ для полного решения не хватает только исследования функции на концах промежутка	5 баллов
Задача сведена к исследованию на отрезке $[-1; 1]$ квадратного трёхчлена $f(x) = ax + \frac{b}{2}(1 - x^2)$	3 балла
Доказано, что неравенство выполнено при $x = \pm 1$	1 балл
Утверждение проверено для нескольких конкретных пар (a, b)	0 баллов

10.4. На рёбрах $AD, BC, CC_1, C_1D_1, A_1B_1, AA_1$ куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ выбрали точки P, Q, R, S, T, U соответственно так, что

$$\begin{aligned} \angle PQB = \angle RQC, \quad \angle RSC_1 = \angle TSD_1, \quad \angle TUA_1 = \angle PUA, \\ \angle QRC = \angle SRC_1, \quad \angle STB_1 = \angle UTA_1, \quad \angle UPA = \angle QPD. \end{aligned}$$

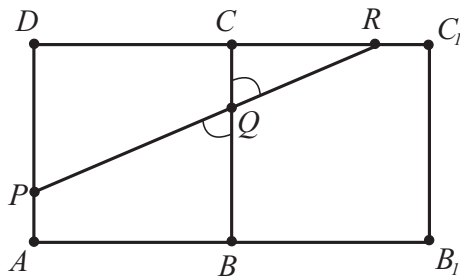
Найдите длину замкнутой ломаной $PQRSTUP$ если длина ребра куба равна 1.



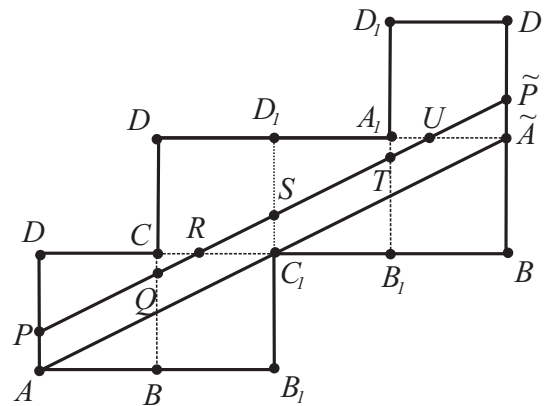
К решению задачи 10.4,
расположение точек на кубе

Решение: Мысленно повернём грань BCC_1B_1 относительно ребра BC так, чтобы вся эта грань оказалась лежащей в плоскости ABC — см. рисунок. Из равенства углов $\angle PQB = \angle RQC$ следует, что эти углы (после поворота) стали вертикальными, поэтому точки P , Q и R теперь лежат на одной прямой — см. рисунок ниже слева.

Аналогично, после нужных поворотов других граней получим, что на одной прямой окажутся тройки точек R , S и T ($\angle RSC_1 = \angle TSD_1$), T , U и P ($\angle TUA_1 = \angle PUA$) и S , Q и R ($\angle QRC = \angle SRC_1$). Этого достаточно, чтобы на развёртке куба (см. рисунок ниже справа) все шесть точек оказались на одной прямой (равенство двух других пар углов из условия — лишнее данное; оно следует из четырёх остальных).



К решению задачи 10.4, равенство углов



К решению задачи 10.4, расположение точек
на развёртке

Мы доказали, что длина ломаной $PQRSTUP$ равна длине отрезка $P\tilde{P}$ (см. рисунок выше справа). Так как четырёхугольник $P\tilde{P}\tilde{A}A$ — параллелограмм (его стороны PA и $\tilde{P}\tilde{A}$ равны и параллельны), эта длина равна длине отрезка $\tilde{A}A$. Последняя легко находится по теореме Пифагора: $\tilde{A}A = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Ответ: $\sqrt{20}$.

Примечание 1: Из анализа решения видно, что

$$\frac{QC}{CR} = \frac{SC_1}{C_1R} = \frac{A_1T}{A_1U} = \frac{AP}{AU} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, можно найти углы между звеньями ломаной и рёбрами куба (они равны $\arctg 2$ и $\arctg 0,5$).

Примечание 2: Задача допускает и громоздкие технические решения: ввести неизвестные (например, $QC = x$, $CR = y$), через подобие треугольников найти остальные длины, составить уравнение и вывести соотношение между неизвестными, затем по теореме Пифагора подсчитать длины звеньев (как функцию от

введённых переменных). При дальнейшем суммировании эта переменная уничтожится и получится нужная константа.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения есть арифметические ошибки, возможно, приведшие к неверному ответу	6 баллов
Верно найдены углы между звеньями ломаной и рёбрами куба	4 балла
Имеется идея рассмотреть развёртку поверхности куба ИЛИ условие задачи верно выражено через введённые переменные — длины отрезков и величины углов	3 балла
Отмечено подобие хотя бы одной из пар треугольников: $\Delta TA_1U \sim \Delta UAP$, $\Delta QRC \sim \Delta SRC_1$ и выписано отношение пропорциональных сторон	2 балла
Верный ответ без обоснования (возможно, проиллюстрированный на частных примерах)	1 балл
Любые рассуждения и доп. построения, не ведущие к решению задачи	0 баллов

10.5. Верно ли, что бесконечное множество квадратов со сторонами

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

можно разместить в большом квадрате со стороной 1 так, чтобы никакие маленькие квадраты между собой не пересекались?

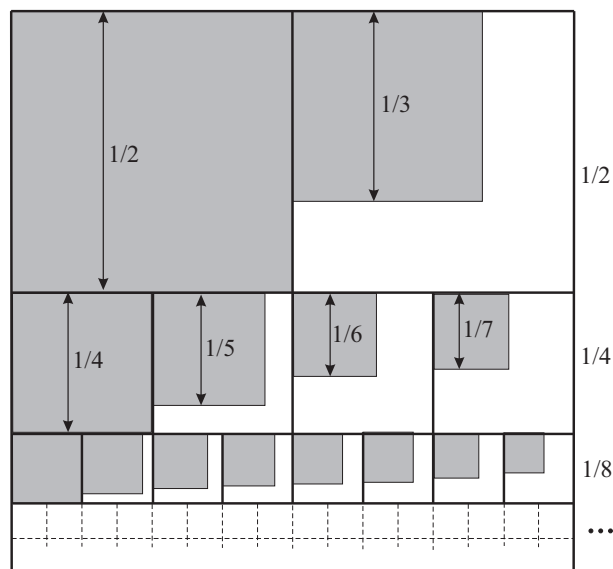
Решение: Разделим сторону квадрата со стороной 1 на отрезки длиной $1/2, 1/4, 1/8, 1/16$, и. т. д. (это возможно, так как сумма бесконечной геометрической прогрессии $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots$ как раз 1). Через точки деления проведём прямые, параллельные другой стороне квадрата (см. рисунок).

Квадрат разделится на полосы; ширина i -й полосы равна $\frac{1}{2^i}$. Каждую из этих полос разрежем на квадраты той же ширины; из i -й полосы получится 2^i квадратов. В эти квадраты разместим (по одному в каждый) квадраты со сторонами

$$\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^i + 1}, \frac{1}{2^i + 2}, \dots, \frac{1}{2^i + 2^i - 1} = \frac{1}{2^{i+1} - 1}.$$

Все квадраты уложены.

Ответ: верно.



К решению задачи 10.5

Примечание: В решении задачи по сути приведено доказательство, что ряд из квадратов чисел, обратных к натуральным, сходится $\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} < \infty\right)$, и его сумма не больше 2. В этом его ключевое отличие от гармонического ряда $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$, сумма которого бесконечна.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Верная конструкция приведена, (достаточно рисунка), но не обосновано, что она возможна	5 баллов
Ответ без обоснования ИЛИ неверные способы размещения	0 баллов

10.6. Двадцать сосисок и десять сарделек соединили в одну незамкнутую цепочку в произвольном порядке. Владелец двух собак хочет перерезать цепочку в нескольких местах соединений так, чтобы можно было без дальнейших разрезов поделить сардельки и сосиски поровну между своими питомцами (т. е. по десять сосисок и по пять сарделек каждой собаке). Какого наименьшего числа разрезов ему заведомо хватит при любом расположении сарделек и сосисок в цепочке?

Решение: Если в цепочке с одного конца идут все сосиски, а с другого — сардельки, то потребуется хотя бы два разреза, так как надо и сардельки разделить, и сосиски, а одним разрезом этого не сделать. Покажем, что двух разрезов хватит при любом расположении сосисок и сарделек в цепочке. Обозначим сосиску буквой О, сардельку буквой А. Тогда любая цепочка представляет собой слово из 20 букв О и десяти букв А. Назовём любую группу подряд идущих букв в

слове подсловом. Покажем, что в нашем слове можно найти 15-буквенное подслово, содержащее ровно 10 букв О — назовём такое подслово хорошим. (Этого достаточно для того, чтобы хватило двух разрезов: вырежем из цепочки кусок, соответствующий хорошему подслову, и отдадим его одной из собак, а второй отдадим остальное.) Рассмотрим первые пятнадцать букв слова. Если в них букв О ровно 10, хорошее подслово найдено. Пусть их меньше 10 (случай больше 10 рассматривается аналогично). Будем последовательно переходить к следующему 15-буквенному подслову, убирая одну букву слева и добавляя одну букву справа. Каждый раз будем считать количество букв О в рассматриваемом подслову. Заметим, что это количество увеличится на 1, если мы добавили букву О, а убрали букву А, уменьшится на 1, если добавили А, а убрали О, и не изменится, если мы добавили ту же букву, что и убрали. Таким образом, количество букв О меняется не более, чем на 1 (в ту или другую сторону). Последнее из рассматриваемых подслов состоит из последних 15 букв исходного слова, поэтому количество букв О в нём больше 10. Среди рассмотренных подслов найдём первое, в котором количество букв не меньше 10 (такое, очевидно, существует). Оно искомое, так как в предыдущем подслову букв О было меньше 10, а увеличится это количество может только на 1.

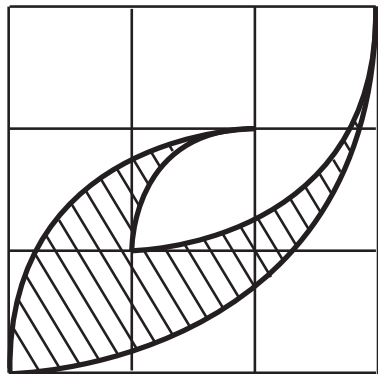
Ответ: два разреза.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Доказательство, что двух разрезов заведомо хватит, при этом не обосновано, что одного разреза в общем случае недостаточно	4 балла
Пример расположения сосисок-сарделек, при котором одного разреза не хватит, и доказательство этого факта	2 балла
Верный ответ без обоснования	1 балл
Примеры расположения сосисок-сарделек, при которых достаточно одного разреза	0 баллов

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников по математике
в 2025 – 2026 учебном году
11 класс**

Время выполнения заданий – 3 часа 55 минут

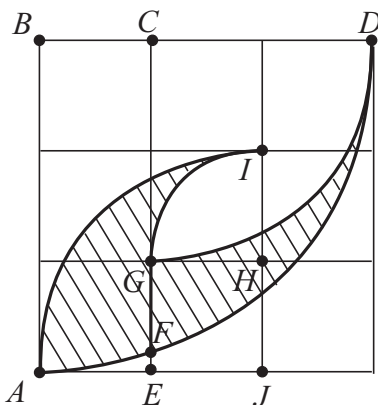


К условию задачи 11.1

11.1. Найдите площадь заштрихованной на рисунке фигуры (см. рисунок), границей которой является круговой сплайн — замкнутая непрерывная линия, составленная из дуг окружностей (с центрами в узлах сетки). Длина стороны клетки равна 1.

Решение:

Способ 1. Обозначим центры и концы дуг окружностей так, как показано на рисунке. Введём обозначение: через $S_{X,\overline{YZ}}$ будем обозначать площадь сектора окружности с центром X , ограниченного дугой YZ . Разделим фигуру, площадь которой требуется найти, на две отрезком GF и найдём по отдельности площадь каждой из частей. Площадь правой фигуры равна $S_{\text{пр}} = S_{B,\overline{AD}} - S_{C,\overline{GD}} - (S_{ABCE} - x)$, где x — площадь фигурки, ограниченной отрезками AE , EF и дугой AF .



К решению задачи 11.1,
способ 1

Все секторы являются четвертинками кругов и их площади находятся элементарно; поэтому

$$S_{\text{пр}} = \frac{1}{4}\pi 3^2 - \frac{1}{4}\pi 2^2 - 3 + x = \frac{5\pi}{4} - 3 + x.$$

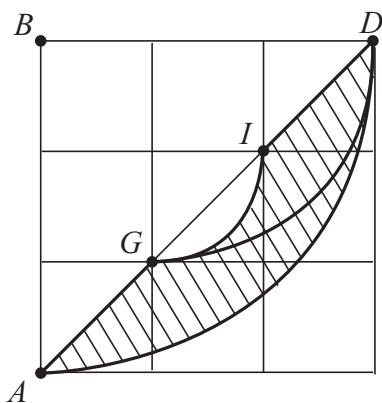
Аналогично, площадь левой фигурки равна

$$\begin{aligned} S_{\text{л}} &= S_{J,\overline{AI}} - S_{J,\overline{GI}} - S_{EGHJ} - x = \\ &= \frac{1}{4}\pi 2^2 - \frac{1}{4}\pi 1^2 - 1 - x = \frac{3\pi}{4} - 1 - x. \end{aligned}$$

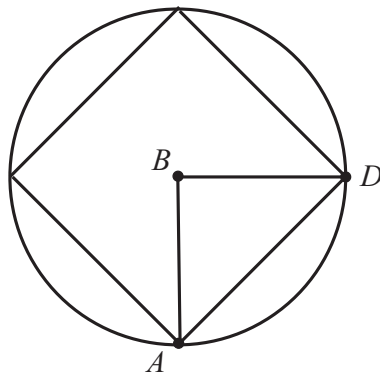
Поэтому общая площадь равна $S_{\text{пр}} + S_{\text{л}} = 2\pi - 4$.

Способ 2. Разрежем фигурку по прямой AD , и ту часть, которая лежит выше прямой, повернём на 180° (см. рисунок ниже слева). Получим равную по площади фигуру (заштрихованная часть на рисунке). Она представляет собой разность двух сегментов, линейные размеры меньшего из которых в три раза меньше линейных размеров большего. Так как площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия, интересующая нас площадь равна $\frac{8}{9}$ площади большего сегмента. Но этот сегмент — ровно четверть площади фигуры, которая получится, если из круга радиуса 3 удалить вписанный в него квадрат (см. рисунок ниже справа), поэтому его площадь равна $\frac{1}{4}(9\pi - (3\sqrt{2})^2)$. Тогда искомая площадь равна

$$\frac{8}{9} \cdot \frac{9\pi - 18}{4} = 2\pi - 4.$$



К решению задачи 11.1, способ 2, разрез
фигуры



К решению задачи 11.1, способ 2, удаление
квадрата

Ответ: $2\pi - 4$.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения имеются арифметические ошибки, возможно, приведшие к неверному ответу	5 баллов
Задача верно сведена к нахождению площадей круговых секторов и/или сегментов с известными центральными углами, но расчёты не выполнены	3 балла
Верный ответ без обоснования	1 балл
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи	0 баллов

11.2. Пусть $P(x)$ — квадратный трёхчлен. Действительные числа a, b, c попарно различны и таковы, что $P(a) = bc$, $P(b) = ca$, $P(c) = ab$. Какие значения может принимать выражение

$$\frac{P(a) + P(b) + P(c)}{P(a + b + c)} ?$$

Ответ обоснуйте.

Решение: Пусть $P(x) = mx^2 + nx + t$. Тогда (учитывая, что $a - b \neq 0$) имеем $P(a) - P(b) = m(a + b)(a - b) + n(a - b) = c(b - a)$, откуда $m(a + b) + n = -c$. Аналогично $m(b + c) + n = -a$. Вычтем из одного уравнения другое и получим $m = 1$ (опять-таки учли, что $a - c \neq 0$). Тогда

$$n = -(a + b + c), \quad t = ab + ac + bc, \\ p(x) = x^2 - (a + b + c)x + ab + ac + bc,$$

наше выражение тождественно равно 1, так как

$$\frac{P(a) + P(b) + P(c)}{P(a + b + c)} = \frac{bc + ca + ab}{(a + b + c)^2 - (a + b + c)(a + b + c) + ab + ac + bc} = 1.$$

Ответ: 1.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Задача решена для случая приведённого квадратного трёхчлена	4 балла
Условие задачи верно записано в виде системы уравнений (неизвестные — коэффициенты трёхчлена)	2 балла
Верный ответ, проиллюстрированный конкретным трёхчленом (и конкретной тройкой чисел a, b, c)	1 балл
Ответ без обоснования, а также любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи	0 баллов

11.3. У натурального числа n нашлись два различных натуральных делителя m и k , для которых выполнено равенство

$$k = \frac{n - m}{m - 5}.$$

Докажите, что число $\frac{n}{5}$ — целое и является квадратом натурального числа.

Решение: Уравнение из условия задачи равносильно равенству $km - 5k + m = n$. Число $m = n + 5k - km$ делится без остатка на k , так как k — делитель каждого слагаемого в правой части. Аналогично, число $5k = -n + m + km$ делится без остатка на m . Пусть $m = tk$, где $t \in \mathbb{N}$. Тогда $5k$ кратно числу tk , то есть 5 кратно t . Значит, либо $t = 1$, либо $t = 5$. Первый случай невозможен, так как $m \neq k$ по условию. Итак, $t = 5$, $m = 5k$, $n = km = 5k^2$. Тогда $\frac{n}{5} = k^2$, ч. т. д.

Ещё подчеркнём, что искомые тройки чисел m, k и n существуют. Например, $n = 45$, $k = 3$, $m = 15$.

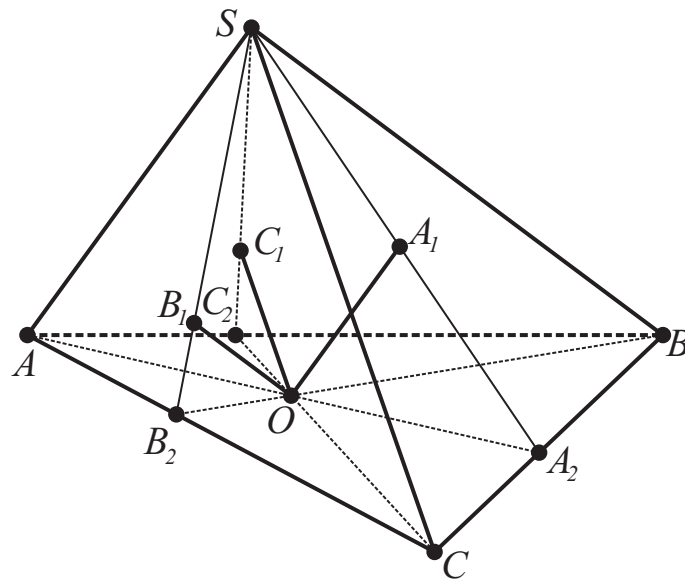
Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Не указан пример натуральных чисел n, m и k , удовлетворяющих условию задачи	баллы не снижать
Доказано, что а) число m кратно k ; б) число m является делителем числа $5k$	4 балла
Доказан один из пунктов а) или б) критерия на 4 балла	2 балла
Любые выкладки, не ведущие к решению, а также иллюстрация утверждения конкретными примерами	0 баллов

11.4. Из произвольной точки O , лежащей на грани ABC треугольной пирамиды $SABC$ провели прямые $OA_1 \parallel SA$, $OB_1 \parallel SB$ и $OC_1 \parallel SC$ (точки A_1 , B_1 , C_1 лежат на гранях SBC , SCA и SAB соответственно). Докажите равенство

$$\frac{OA_1}{SA} + \frac{OB_1}{SB} + \frac{OC_1}{SC} = 1.$$

Решение: Пусть плоскость ASO пересекает ребро BC в точке A_2 , тогда эта плоскость пересекает грань SBC по отрезку SA_2 . Прямая OA_1 лежит в плоскости SAO , так как она имеет с ней общую точку O и параллельна лежащей в ней прямой SA . Значит, точка A_1 лежит на отрезке SA_2 . Аналогично точки B_1 и C_1 лежат на отрезках SB_2 и SC_2 соответственно (точки B_2 и C_2 определяются аналогично точке A_2) — см. рисунок.



К решению задачи 11.4, расположение точек A_1 , B_1 , C_1

Из подобных треугольников A_2A_1O и A_2SA получаем равенство

$$\frac{OA_1}{SA} = \frac{A_2O}{A_2A}.$$

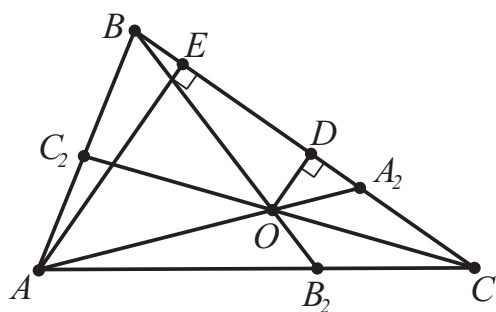
Конечно, такие же равенства верны и для двух других дробей:

$$\frac{OB_1}{SB} = \frac{B_2O}{B_2B}, \quad \frac{OC_1}{SC} = \frac{C_2O}{C_2C}.$$

Задача свелась к планиметрической: «если на сторонах AB , AC и BC выбраны соответственно точки C_2 , B_2 и A_2 так, что отрезки AA_2 , BB_2 , CC_2 пересекаются в точке O , то выполняется равенство

$$\frac{OA_2}{A_2A} + \frac{OB_2}{B_2B} + \frac{OC_2}{C_2C} = 1.$$

Докажем это утверждение.



К решению задачи 11.4, картина в основании пирамиды

Опустим из точек A и O перпендикуляры на прямую BC — отрезки OD и AE (см. рисунок). Тогда из подобия треугольников AA_2E и OA_2D следует, что

$$\frac{OA_2}{A_2A} = \frac{OD}{AE} = \frac{\frac{1}{2}BC \cdot OD}{\frac{1}{2}BC \cdot AE} = \frac{S_{BOC}}{S_{BAC}}.$$

Аналогично доказываются равенства

$$\frac{OB_2}{B_2B} = \frac{S_{AOC}}{S_{BAC}}, \quad \frac{OC_2}{C_2C} = \frac{S_{BOA}}{S_{BAC}}.$$

Значит,

$$\frac{OA_2}{A_2A} + \frac{OB_2}{B_2B} + \frac{OC_2}{C_2C} = \frac{S_{BOC}}{S_{BAC}} + \frac{S_{AOC}}{S_{BAC}} + \frac{S_{BOA}}{S_{BAC}} = \frac{S_{BAC}}{S_{BAC}} = 1.$$

Доказательство завершено.

Примечание: Для школьников, знающих формулу объёма пирамиды, задача допускает следующее решение: Пирамида $SABCD$ представляется как объединение трёх пирамид $SABO$, $SBCO$, $SCAO$. Каждая из дробей в доказываемой формуле равна отношению объёмов одной из этих пирамид к объёму всей пирамиды $SABC$ — доказательство почти такое же, как в приведённом выше решении для площадей треугольников.

Рекомендации по проверке:

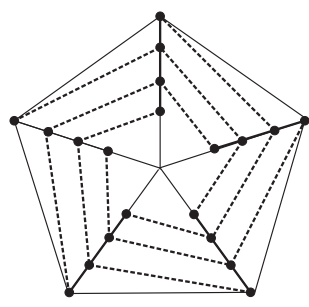
Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Задача верно сведена к планиметрической ИЛИ дроби в доказываемом равенстве представлены в виде отношения объёмов пирамид	3 балла
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи, а также решения в частных случаях (для конкретных точек O)	0 баллов

11.5. Центр подготовки космонавтов готовит экипажи для работы на МКС в составе четырёх человек каждый, причем у любых двух экипажей может быть не более одного общего члена, и каждый космонавт может участвовать не более, чем в двух экипажах. Какое наименьшее количество человек необходимо для подготовки 10 экипажей? Ответ обоснуйте.

Решение: Добавим к каждому человеку его двойника, но потребуем, чтобы каждый человек был в составе не более, чем одного экипажа. Тогда для 10 экипажей

потребуется ровно 40 человек, поэтому до добавления двойников в центре подготовки было по крайней мере 20 человек. Покажем, что 20 человек достаточно. Сначала сформируем из них пять экипажей, не имеющих общих членов. При своим этим экипажам номера от 1 до 5. В шестой экипаж отрядим по одному космонавту из экипажей 1, 2, 3, 4. В седьмой — по одному из экипажей 1, 2, 3, 5 (берём других космонавтов), в восьмой — из экипажей 1, 2, 4, 5, в девятый — из экипажей 1, 3, 4, 5, наконец, в десятый — 2, 3, 4, 5. Условие задачи выполнено.

Примечание: Сформировать экипажи нужным образом можно и чисто геометрически, например, так. Построим космонавтов в пять колонн, по 4 человека в каждой, а каждую колонну поставим на своей линии, идущей от вершины правильного пятиугольника к его центру. Первые пять экипажей — сами колонны



К примечанию
к задаче 11.5

(см. рисунок). Теперь дальних от центра пятиугольника космонавтов не двигаем, тех кто стоит непосредственно перед ними (второй ряд) сдвинем по кругу влево на одного человека, третий ряд — влево на двух человек, а четвёртый — влево на трёх. Космонавты, оказавшиеся после сдвигов в одной колонне, образуют ещё пять экипажей — пунктирные линии на рисунке.

Ответ: 20 космонавтов.

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Пример на 20 человек	4 балла
Доказано, что необходимо не менее 20 человек	3 балла
Ответ без обоснования	0 баллов

11.6. Известно, что числа $\sin 2x$, $\sin 5x$ и $\sin 7x$ являются рациональными, и ни одно из них не равно 0. Докажите, что тогда число $\sin 12x$ также является рациональным.

Решение: Пусть

$$\begin{aligned}\sin 2x &= a, & \sin 5x &= b, & \sin 7x &= c, & \sin 12x &= d, \\ \cos 2x &= X, & \cos 5x &= Y, & \cos 7x &= Z.\end{aligned}$$

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} a = \sin 2x = \sin (7x - 5x) = cY - bZ, \\ b = \sin 5x = \sin (7x - 2x) = cX - aZ, \\ c = \sin 7x = \sin (5x + 2x) = bX + aY. \end{cases}$$

Решая систему, получим, что

$$Y = \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2ac} \quad \text{и} \quad Z = \frac{c^2 - b^2 - a^2}{2ab}$$

являются рациональными числами, поскольку числа a, b, c — рациональные. Для решения задачи остается заметить, что $d = \sin 12x = \sin(5x + 7x) = bZ + cY$ — рациональное число.

Примечание: Числа x , синусы которых удовлетворяют условию задачи, существуют, так что задача корректно определена. Действительно, достаточно взять любое число x , для которого $\sin x$ и $\cos x$ являются рациональными числами, например $x = \arcsin 0,6$. В этом случае все числа вида $\sin nx$ и $\cos nx$ ($n \in \mathbf{N}$) будут рациональны (доказывается индукцией по n).

Рекомендации по проверке:

Есть в работе	Баллы
Верное доказательство	7 баллов
Не указан пример числа x , удовлетворяющего условию задачи	баллы не снижать
Любые рассуждения и выкладки, не ведущие к решению задачи	0 баллов